

Classes logarithmiques et capitulation

par

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous étudions un analogue logarithmique du Théorème d’Artin-Furtwängler sur la capitulation en transposant dans le cadre des classes logarithmiques les arguments mis en œuvre dans la preuve algébrique classique du Théorème de l’idéal principal.

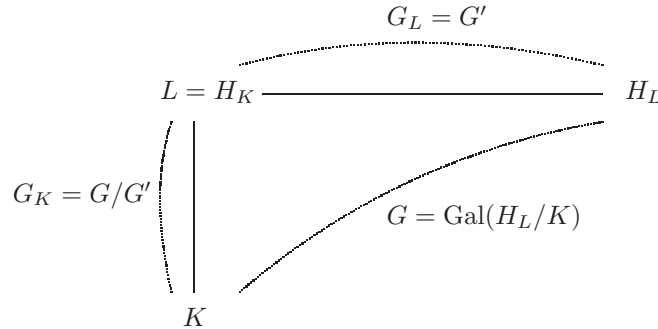
Abstract. We study a logarithmic version of the classical result of Artin-Furtwängler on principalization of ideal classes in the Hilbert class-field by applying the group theoretic description of the transfert map to logarithmic class-groups of degree 0.

1. Introduction

Le célèbre Théorème d’Artin-Furtwängler (*cf.* [2, 4, 3]) affirme que le groupe des classes d’idéaux Cl_K d’un corps de nombres K capitule dans son corps des classes de Hilbert $L = H_K$; en d’autres termes que les idéaux de K se principalisent dans son extension abélienne non ramifiée maximale L .

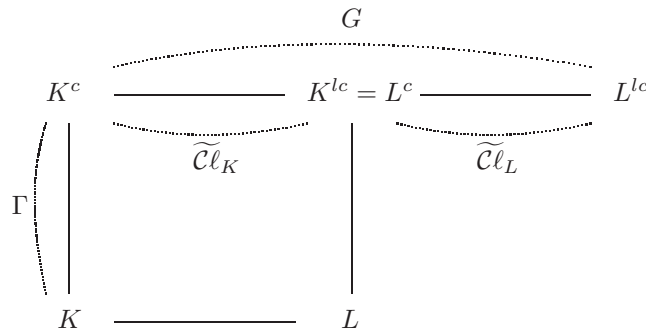
Et, comme l’extension des classes d’idéaux est injective pour les ℓ -parties dans une extension de degré étranger à ℓ , cela revient à dire que, pour tout nombre premier ℓ , le ℓ -sous-groupe de Sylow du groupe des classes d’idéaux d’un corps de nombres capitule dans le ℓ -corps des classes de Hilbert de ce corps *i.e.* dans sa ℓ -extension abélienne non ramifiée maximale.

La preuve du Théorème d’Artin-Furtwängler repose sur deux éléments, le premier de nature arithmétique, le second purement algébrique : d’une part, la Théorie du corps de classes interprète le groupe de classes d’idéaux Cl_K comme groupe de Galois G_K de l’extension abélienne H_K/K , l’homomorphisme d’extension $j_{L/K} : Cl_K \rightarrow Cl_L$ correspondant dans cette description au morphisme de transfert $Ver_{L/K} : G_K \rightarrow G_L$; d’autre part, des considérations de théorie des groupes montrent alors que le transfert est nul dans la situation étudiée :



Il est ainsi défini dans [8], pour chaque nombre premier ℓ et tout corps de nombres K , un groupe de classes logarithmiques noté $\mathcal{C}\ell_K$, obtenu en remplaçant les valuations ordinaires $\nu_{\mathfrak{p}}$ attachées à chaque place finie \mathfrak{p} de K par leurs analogues formels $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ définis à partir du logarithme ℓ -adique de la valeur absolue ℓ -adique attachée à la place \mathfrak{p} . La Théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. [9, 5]) interprète alors le groupe de classes $\mathcal{C}\ell_K$ comme groupe de Galois de la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale $K^{\ell c}$ du corps K .

Lorsqu'elle est satisfaite, l'extension localement cyclotomique K^{lc} provient alors, par composition avec K^c , d'une extension abélienne L de K (que l'on peut supposer linéairement disjointe de K^c) et il est naturel d'introduire la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale L^{lc} du corps L et de considérer le morphisme d'extension $\tilde{j}_{L/K} : \widetilde{\mathcal{C}}_K \rightarrow \mathcal{C}_L$. Dans le schéma obtenu cependant arrive une deuxième difficulté :



Le but de cette note est d'étudier la transposition dans ce contexte logarithmique des résultats classiques d'Artin-Furtwängler et de Tannaka-Terada sur la capitulation dans le corps des classes de Hilbert ou dans le corps des genres relatif à une extension cyclique non ramifiée (devenant ici procyclique).

2. Bref rappel sur les classes logarithmiques

Classiquement, le groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres K est défini comme conoyau Cl_K du morphisme naturel partant du groupe multiplicatif K^\times à valeurs dans le groupe des idéaux Id_K donné par la famille des valuations $\nu = (\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in Pl_K}$ attachées aux places finies de K .

$$1 \rightarrow E_K \rightarrow K^\times \xrightarrow{\nu} Id_K \rightarrow Cl_K \rightarrow 1.$$

Par produit tensoriel avec \mathbb{Z}_ℓ , son ℓ -sous-groupe de Sylow apparaît comme conoyau du morphisme ν étendu au tensorisé $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ et à valeurs dans le \mathbb{Z}_ℓ -module libre construit sur ces mêmes places : $\mathcal{D}\ell = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$.

Le groupe des classes logarithmiques est le groupe analogue $\mathcal{C}\ell_K$ obtenu en remplaçant les valuations classiques $\nu_{\mathfrak{p}}$ par leurs homologues logarithmiques $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ définis à partir des logarithmes des valeurs absolues ℓ -adiques (cf. [8]) :

$$1 \rightarrow \mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{R}_K \xrightarrow{\tilde{\nu}} \mathcal{D}\ell_K \rightarrow \mathcal{C}\ell_K \rightarrow 1.$$

Pour chaque place finie \mathfrak{p} de K , soit $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$ le compactifié ℓ -adique du groupe $K_{\mathfrak{p}}^\times$ et $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ le ℓ -adifié du groupe des idèles de K .

Du point de vue local, le noyau $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\nu_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ (autrement dit le sous-groupe des unités de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$) est le groupe de normes associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension non ramifiée de $K_{\mathfrak{p}}$; tandis que le noyau $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ (i.e. le sous-groupe des unités logarithmiques) correspond, lui, à sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique. Par la Théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. [5, 8, 9]), le ℓ -groupe des classes d'idéaux s'interprète comme groupe de Galois de la ℓ -extension abélienne non ramifiée maximale K^{nr} de K ; et le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_K \simeq \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K$ comme groupe de Galois de sa pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} . Le corps K^{lc} est ainsi la plus grande pro- ℓ -extension abélienne de K qui est complètement décomposée (en toutes ses places) au-dessus de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c . En particulier K^{lc} contient K^c et le groupe $\mathcal{C}\ell_K$ n'est jamais fini.

La surjection canonique du ℓ -adifié \mathcal{J}_K du groupe des idèles de K dans le groupe procyclique $\text{Gal}(K^c/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ fournit cependant un morphisme *degré* :

$$\text{deg} : \mathcal{J}_K \rightarrow \mathbb{Z}_\ell ;$$

dont le noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est, par construction, le sous-groupe normique de \mathcal{J}_K attaché à K^c . Le noyau

$$\tilde{\mathcal{C}}\ell_K \simeq \tilde{\mathcal{J}}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K \simeq \text{Gal}(K^{lc}/K^c)$$

de l'application induite sur $\mathcal{C}\ell_K$ est ainsi le *groupe des classes logarithmiques de degré nul*, qui est l'objet de cette note.

La *Conjecture de Gross généralisée* (pour le corps K et le premier ℓ) postule précisément la finitude de ce groupe. Comme expliqué dans [7], c'est une conséquence d'une conjecture plus générale d'indépendance ℓ -adique de nombres algébriques, qui résulte elle-même de la conjecture de Schanuel ℓ -adique.

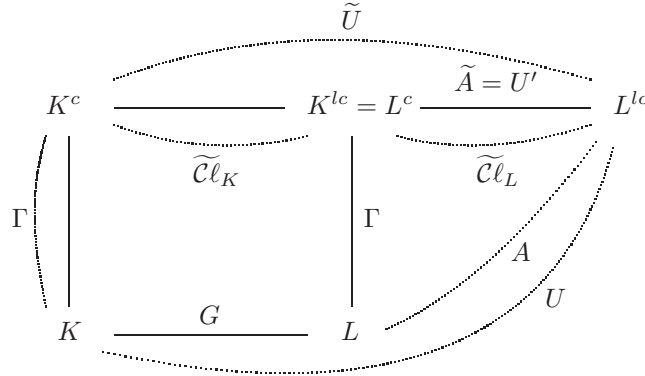
Les résultats de transcendance de Baker-Brumer (cf. e.g. [5, 7]) assurent que la conjecture de Gross généralisée vaut en particulier dès que le corps considéré K est abélien sur \mathbb{Q} . La même conclusion vaut encore sous des hypothèses plus larges, lorsque K est totalement réel, en vertu d'un raffinement du théorème de Baker-Brumer dû à M. Waldschmidt et précisé par M. Laurent puis D. Roy (cf. [10]). Le cas général reste actuellement ouvert.

3. Le schéma galoisien de la capitulation

Partons donc d'un corps de nombre arbitraire, vérifiant la conjecture de Gross généralisée pour un premier donné ℓ . Notons K^c sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique de K et K^{lc} la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique de K . Comme expliqué plus haut, le groupe $\text{Gal}(K^{lc}/K)$ s'identifie alors au pro- ℓ -groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_K$ de K et le sous-groupe $\text{Gal}(K^{lc}/K^c)$ au ℓ -groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes logarithmiques de degré nul.

Soit maintenant L une ℓ -extension abélienne de K telle qu'on ait $LK^c = K^{lc}$ et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ son (pro)- ℓ -groupe des classes logarithmiques de degré nul. Il s'agit de voir que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$. Quitte à remplacer L par un sous-corps convenable L' , nous pouvons supposer L/K linéairement disjointe de K^c/K sans restreindre aucunement la généralité de notre preuve, puisque la capitulation dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L'}$ entraînera la capitulation dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$.

Cela fait, introduisons la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale L^{lc} de L et notons G le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$. Le corps L^{lc} est lui-même une pro- ℓ -extension de K ; soit donc $U = \text{Gal}(L^{lc}/K)$ son groupe de Galois et A le sous-groupe $\text{Gal}(L^{lc}/L)$, qui s'identifie au pro- ℓ -groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_L$. Les sous-groupes de degré nul respectifs de U et de A (*i.e.* les noyaux des morphismes de restriction à K^c) sont respectivement $\widetilde{U} = \text{Gal}(L^{lc}/K^c)$ et $\widetilde{A} = \text{Gal}(L^{lc}/L^c) \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$; et \widetilde{A} est aussi le sous-groupe dérivé de U , puisque $L^c = LK^c$ est, par construction la sous-extension maximale de L^{lc} qui est abélienne sur K . L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer par le schéma de corps :



Maintenant, dans le formalisme du corps de classes, l'extension des idèles (coté arithmétique) correspond au transfert (coté théorie des groupes); de sorte que pour montrer que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$, il s'agit de vérifier que le transfert

$$\text{Ver}_{U/A} : U/U' \rightarrow A$$

envoie le sous-groupe \widetilde{U}/U' de degré nul de U/U' sur le sous-groupe nul de \widetilde{A} .

Il est classique de partir pour cela de l'isomorphisme $G = U/A \simeq \widetilde{U}/\widetilde{A}$ en faisant choix de représentants des classes de G formé d'éléments de \widetilde{U} , disons $(u_\tau)_{\tau \in G}$ (avec la convention $u_{\tau^{-1}} = u_\tau^{-1}$) et d'introduire le système de facteurs

$$a_{\sigma, \tau} = u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1} \in \widetilde{A}$$

dont la classe dans $H^2(G, A)$ définit la loi sur U à isomorphisme près.

4. Interprétation en termes d'algèbre linéaire

En analogie avec le cas classique, nous pouvons alors construire un \mathbb{Z}_ℓ -module résolvant B en formant la somme directe :

$$B = A \oplus I_G = A \oplus \left(\bigoplus_{\tau \neq 1} \mathbb{Z}_\ell(\tau - 1) \right),$$

munie de l'action de G définie par :

$$\sigma * a = a^\sigma \quad \& \quad \sigma * (\tau - 1) = a_{\sigma, \tau} + \sigma(\tau - 1).$$

Suivant Artin-Tate (cf. [3], Ch. 13, §4), nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}\ell_K & \xrightarrow{\sim} & U/U' & \xrightarrow{\sim} & B/I_G * B \\ j_{L/K} \downarrow & & \downarrow \text{Ver}_{U/A} & & \downarrow \text{Tr}_{B/A} \\ \mathcal{C}\ell_L & \xrightarrow{\sim} & A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

où l'isomorphisme en haut à droite est donné par le *logarithme* :

$$au_\tau U' \mapsto a + (\tau - 1) + I_G * B;$$

de sorte que l'homomorphisme d'extension $j_{L/K}$ à gauche correspond au morphisme de transfert $\text{Ver}_{U/A}$ au centre et à la trace $\text{Tr}_{B/A} = \sum_{\tau \in G} \tau$ à droite.

Comme indiqué dans l'introduction, nous sommes intéressés par la restriction de $j_{L/K}$ au sous-groupe des classes logarithmiques de degré nul. Définissons donc le degré d'un élément $b = a + \sum \lambda_\tau(\tau - 1)$ de B par la formule : $\deg b = \deg a$. Le sous-module des éléments de degré nul dans B est alors :

$$\tilde{B} = \tilde{A} \oplus I_G = \tilde{A} \oplus \left(\bigoplus_{\tau \neq 1} \mathbb{Z}_\ell(\tau - 1) \right).$$

Observons que \tilde{B} contient $I_G * B$; et que le quotient $\tilde{B}/I_G * B$ est encore l'image par le logarithme du sous-groupe \tilde{U}/U' des éléments de degré nul du quotient U/U' ; ce que nous pouvons résumer par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{C}}\ell_K & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U}/U' & \xrightarrow{\sim} & \tilde{B}/I_G * B \\ j_{L/K} \downarrow & & \downarrow \text{Ver}_{U/A} & & \downarrow \text{Tr}_{B/A} \\ \tilde{\mathcal{C}}\ell_L & \xrightarrow{\sim} & \tilde{A} & \xlongequal{\quad} & \tilde{A} \end{array}$$

En fin de compte, montrer que les classes logarithmiques de degré nul du corps K capitulent dans L revient à vérifier que pour $B = A \oplus I_G$, muni de l'action de G définie plus haut, l'opérateur trace $\text{Tr}_{B/A} = \sum_{\tau \in G} \tau$ est nul sur le sous-module $\tilde{B} = \tilde{A} \oplus I_G$.

Avant d'aller plus loin, il peut être intéressant de préciser le dénominateur $I_G * B$ qui intervient dans le quotient à droite du diagramme : l'isomorphisme canonique de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules $B/A \simeq I_G$ nous donne l'inclusion : $I_G * B \subset A \oplus I_G^2$.

Pour établir l'égalité, il suffit par conséquent de comparer les deux indices $(\tilde{B} : I_G * B)$ et $(\tilde{B} : \tilde{A} \oplus I_G^2)$. Or, nous avons :

- d'un côté $\tilde{B}/I_G * B \simeq \tilde{U}/U' \simeq \tilde{\mathcal{C}}\ell_K \simeq G$, conformément au diagramme ;
- et directement : $\tilde{B}/(\tilde{A} \oplus I_G^2) = (\tilde{A} \oplus I_G)/(\tilde{A} \oplus I_G^2) \simeq I_G/I_G^2 \simeq G$;

d'où l'égalité annoncée :

$$I_G * B = \tilde{A} \oplus I_G^2.$$

5. Approche par la méthode d'Artin-Furtwängler

La méthode classique, telle qu'exposée dans [3], consiste à écrire le ℓ -groupe G comme produit direct de s sous-groupes cycliques $\langle \tau_i \rangle$ d'ordres respectifs e_i ; et à considérer les éléments $b_i = \tau_i - 1$ de \tilde{B} pour $i = 1, \dots, s$.

Dans le cas classique le module résolvant B est engendré par les $(b_i)_i$; dans le cadre logarithmique qui nous intéresse ici, c'est plus compliqué, du fait qu'il nous faut considérer le sous-module \tilde{B} des éléments de degré nul.

Relevons $\Gamma = \text{Gal}(K^c/K)$ dans $U = \text{Gal}(L^c/K)$ en faisant choix d'un prolongement γ à L^c d'un progénérateur arbitraire de Γ . L'isomorphisme

$$B/I_G * B \simeq U/U' \simeq \Gamma \times G$$

montre que B est engendré, comme $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module, conjointement par γ et les $(b_i)_i$. Et les identités $e_j b_i \in I_G * B$ s'écrivent ainsi :

$$e_i b_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} * b_j + \mu_i * \gamma$$

avec les λ_{ij} et les μ_i dans I_G . Notant alors M la matrice de terme général $m_{ij} = e_i \delta_{ij} - \lambda_{ij}$, nous obtenons :

$$M * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{bmatrix} * \gamma ;$$

puis, par multiplication à gauche par la transcomatrice \tilde{M} de M :

$$\det M * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \tilde{M} M * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{bmatrix} * \gamma = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_s \end{bmatrix} * \gamma$$

c'est-à-dire : $\det M * b_i = \nu_i * \gamma$ pour un ν_i de I_G , pour chaque $i = 1, \dots, s$.

L'isomorphisme $\tilde{B}/\tilde{A} \simeq I_G$ montre alors que $\det M \in \mathbb{Z}_\ell[G]$ est un multiple de la trace, disons : $\det M = \kappa \text{Tr}_{B/A}$, pour un κ dans \mathbb{Z}_ℓ . Et un calcul de degré dans l'algèbre de groupe donne alors directement :

$$\deg(\det M) = \det([\deg(m_{ij})]_{ij}) = \det([e_i \delta_{ij}]_{ij}) = \prod e_i = |G| = \deg \text{Tr}_{B/A} ;$$

d'où, comme attendu : $\det M = \text{Tr}_{B/A}$ et finalement l'inclusion :

$$\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B}) \subset I_G * \gamma$$

puisque \tilde{B} est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -engendré par les b_i (pour $i = 1, \dots, s$) et $I_G * \gamma$; de sorte que $\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B})$ est engendré par les $\text{Tr}_{B/A}(b_i)$ pour $i = 1, \dots, s$. Ainsi :

Proposition 1. *Avec les notations ci-dessus, l'image dans \mathcal{Cl}_L du sous-groupe des classes logarithmiques de degré nul $\tilde{\mathcal{Cl}}_K$ s'identifie au sous-module $\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B})$ du $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module $I_G * \gamma$ construit sur un relèvement du groupe procyclique Γ .*

Remarque. La méthode ne donne donc pas la trivialité du groupe $\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B})$, comme dans le cas classique, mais seulement une inclusion.

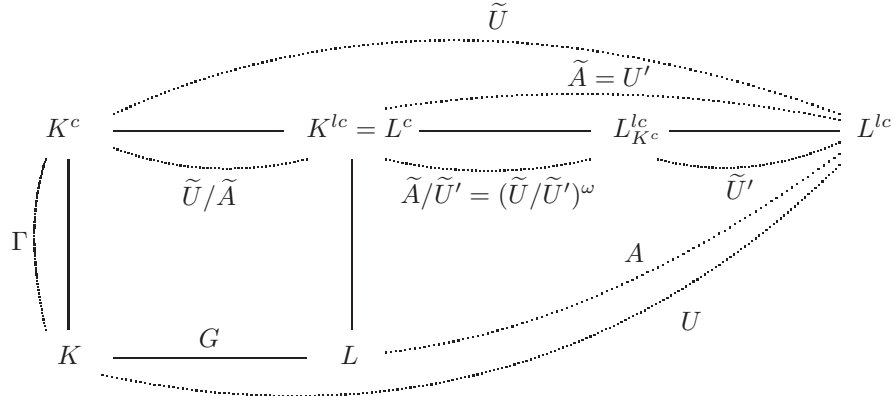
6. Interprétation en termes de théorie des genres

Pour aller plus loin dans la description de la capitulation logarithmique, nous pouvons nous inspirer des méthodes initiées par T. Tannaka et F. Terada pour généraliser le *Théorème de l'idéal principal* dans le contexte de la théorie cyclique des genres (cf. [11, 12, 13, 14]).

Introduisons le sous-corps $L_{K^c}^{lc}$ de L^{lc} fixé par le sous-groupe dérivé \tilde{U}' de $\tilde{U} = \text{Gal}(L^{lc}/K^c)$. Par construction $L_{K^c}^{lc}/K^c$ est la plus grande sous-extension de L^{lc}/K^c qui est abélienne sur K^c et nous avons : $\text{Gal}(L_{K^c}^{lc}/L^c) \simeq \tilde{A}/\tilde{U}'$. Cela étant, L^c , qui est la plus grande sous-extension de $L_{K^c}^{lc}/K^c$ qui provient par composition avec K^c d'une extension abélienne de K , est donc le corps des genres de $L_{K^c}^{lc}$ relativement à l'extension procyclique K^c/K ; en particulier $\text{Gal}(L^c/K^c)$ est le plus grand quotient de $\tilde{U}/\tilde{U}' = \text{Gal}(L_{K^c}^{lc}/K^c)$ sur lequel $\Gamma = \text{Gal}(K^c/K)$ opère trivialement ; et nous avons donc : $\text{Gal}(L_{K^c}^{lc}/L^c) \simeq (\tilde{U}/\tilde{U}')^\omega$; d'où, finalement :

$$\tilde{A}/\tilde{U}' = (\tilde{U}/\tilde{U}')^{(\gamma-1)},$$

si γ désigne un relèvement arbitraire dans $A = \text{Gal}(L^{lc}/K)$ d'un générateur topologique de Γ . Et l'ensemble de cette discussion peut être résumé par le schéma de corps :



où nous avons noté $\omega = \gamma - 1$.

Précisons quelques points. Comme $\Gamma \simeq \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ opère trivialement sur le quotient $U/A \simeq G$, nous pouvons écrire :

$$u_\tau^\gamma = \gamma u_\tau \gamma^{-1} = a_\tau u_\tau$$

pour tout $\tau \in G$, avec

$$a_\tau = u_\tau^\gamma u_\tau^{-1} = [\gamma, u_\tau] = \gamma^{1-\tau} ;$$

Convenons de noter \tilde{U}^ω le sous-groupe de \tilde{A} qui est engendré par les a_τ lorsque τ décrit G . Cela étant, nous avons :

Lemme 2. *Avec ces conventions, il vient : $\tilde{A} = \tilde{U}'\tilde{U}^\omega$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'égalité $\tilde{A}/\tilde{U}' = (\tilde{U}/\tilde{U}')^{(\omega)}$ donnée par la théorie des genres.

7. Approche par la méthode de Tannaka-Terada

Revenons maintenant sur le module résolvant B . Rappelons que nous avons fait choix d'un relèvement γ dans $A = \text{Gal}(L^{lc}/L)$ d'un générateur topologique de Γ , ce qui nous a permis de définir les éléments a_τ pour $\tau \in G$. En termes d'algèbre linéaire, *i.e.* en notations additives, il vient ainsi :

$$a_\tau = u_\tau^\gamma u_\tau^{-1} = [\gamma, u_\tau] = \gamma^{1-\tau} = (1-\tau) * \gamma \in I_G * \gamma \subset \tilde{A};$$

et nous pouvons transporter l'action de Γ sur U au module B en posant :

$$\gamma * (\tau - 1) = a_\tau + (\tau - 1).$$

En particulier B peut ainsi être regardé comme un module sur l'algèbre $\Lambda[G]$ construite sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\omega]]$ en l'indéterminée $\omega = \gamma - 1$. De fait l'identité ci-dessus donne immédiatement :

$$\omega^2 * (\tau - 1) = \omega * a_\tau = 0,$$

de sorte que B est annulé par ω^2 . Plus précisément :

Lemme 3. *Avec les conventions précédentes, on a : $\omega * \tilde{B} = \tilde{U}^\omega = I_G * \gamma$. Et \tilde{B} est $\Lambda[G]$ -engendré par les éléments $b_i = \tau_i - 1$, pour $i = 1, \dots, s$.*

Preuve. Il vient, effet :

$$\omega * \tilde{B} = \omega * (\tilde{A} \oplus I_G) = \omega * I_G = \sum_{\tau \in G} \mathbb{Z}_\ell \omega * (\tau - 1) = \sum_{\tau \in G} \mathbb{Z}_\ell a_\tau = \tilde{U}^\omega;$$

d'où, par passage au quotient à partir de l'isomorphisme : $\tilde{B}/I_G * \tilde{B} \simeq \tilde{U}/\tilde{U}'$:

$$\tilde{B}/(I_G * \tilde{B} + \omega * \tilde{B}) \simeq \tilde{U}/\tilde{U}'\tilde{U}^\omega = \tilde{U}/\tilde{A} \simeq G;$$

de sorte que \tilde{B} , regardé comme $\Lambda[G]$ -module, est engendré par les s éléments $b_i = \tau_i - 1$ construits sur un système minimal de générateurs de G .

Ce point acquis, les identités $e_j b_i \in I_G * B + \omega * \tilde{B}$ s'écrivent :

$$e_i b_i = \sum_{j=1}^s \mu_{ij} * b_j + \omega * \sum_{j=1}^s \nu_{ij} * b_j$$

avec les μ_{ij} dans I_G et les ν_{ij} dans $\mathbb{Z}_\ell[G]$. Notant alors M la matrice de terme général $m_{ij} = e_i \delta_{ij} - \lambda_{ij}$ et N celle de terme général ν_{ij} , nous obtenons :

$$[M - \omega N] * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ donc : } \det[M - \omega N] * \tilde{B} = 0.$$

Un calcul modulo \tilde{A} montre alors, comme précédemment, que le déterminant de la matrice M coïncide avec la trace $\text{Tr}_{B/A}$, de sorte que le déterminant $d = \det[M - \omega N]$ (calculé modulo ω^2) est de la forme :

$$d = \text{Tr}_{B/A} - \omega \delta$$

pour un certain $\delta \in \mathbb{Z}_\ell[G]$. En particulier :

Proposition 4. *Comme opérateur sur \tilde{B} , la trace s'écrit : $\text{Tr}_{B/A} = \omega \delta$; et il suit :*

$$\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B}) = \delta \omega * \tilde{B} = \delta I_G * \gamma.$$

8. Capitulation des classes invariantes

La Proposition 4 ci-dessus précise naturellement l résultat obtenu à la fin de la section 5 par le procédé d'Artin-Furtwängler, puisqu'elle décrit précisément le sous-module image $\text{Tr}_{B/A}(\tilde{B})$ des classes logarithmique étendues ; mais elle ne donne pas d'information directe sur le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ qui capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$. Nous allons voir que la méthode de Tannaka-Terada donne cependant des éléments de réponse :

Théorème 5. *Le noyau de la trace $\text{Tr}_{B/A}$ regardé dans le quotient $\tilde{B}/I_G * \tilde{B}$ contient le sous-groupe ambige $(\tilde{B}/I_G * \tilde{B})^\Gamma = {}^{-1}\omega(I_G * \tilde{B})/I_G * \tilde{B}$.*

En d'autres termes, on a l'implication :

$$\omega(\tilde{b}) \in I_G * \tilde{B} \Rightarrow \text{Tr}_{B/A}(\tilde{b}) = 0.$$

Remarque. Le quotient $\tilde{B}/I_G * \tilde{B} \simeq \tilde{U}/\tilde{U}'$ est annulé par ω^2 . Le théorème affirme seulement que le sous-groupe annulé par ω est contenu dans le noyau de $\text{Tr}_{B/A}$.

Preuve. Le noyau $\tilde{A} \cap I_G * \tilde{B}$ du morphisme naturel $A \rightarrow \tilde{B}/I_G * \tilde{B} \simeq \tilde{U}/\tilde{U}'$ étant \tilde{U}' , nous avons $\tilde{A} \cap I_G * \tilde{B} = \tilde{U}'$, donc :

$$\omega\tilde{B} \cap I_G * \tilde{B} = \omega\tilde{B} \cap \tilde{A} \cap I_G * \tilde{B} = \tilde{U}' \cap \omega\tilde{B}.$$

Et le Théorème sera établi si nous montrons que l'opérateur δ est nul sur \tilde{U}' .

Observons pour cela que le groupe \tilde{U} est engendré par \tilde{A} et les $(u_\tau)_{\tau \in G}$; de sorte que son sous-groupe dérivé \tilde{U}' , lui, est engendré conjointement

- par les commutateurs $[a, u_\tau] = a^{(1-\tau)}$ avec $a \in \tilde{A}$ et $\tau \in G$ et
- par les $[u_\sigma, u_\tau]$, lorsque σ et τ parcourent un système générateur de G .

Introduisons le sous-module $\partial\tilde{B}$ de \tilde{B} qui est engendré par les commutateurs :

$$[b_i, b_j] = b_i * b_j - b_j * b_i = (\tau_i - 1) * (\tau_j - 1) - (\tau_j - 1) * (\tau_i - 1) = a_{\tau_i, \tau_j} - a_{\tau_j, \tau_i}.$$

Traduites en notations additives, les observations précédentes nous donnent l'identité :

$$\tilde{U}' = I_G * A + \partial\tilde{B}.$$

Supposons établie la trivialité de δ sur le sous-module $\partial\tilde{B}$. Il vient alors :

$$\delta * \tilde{U}' = \delta * I_G * \tilde{A} = \delta I_G * (\tilde{U}' + \omega * \tilde{B}) = I_G * (\delta * \tilde{U}')$$

d'où :

$$\delta * \tilde{U}' = 0,$$

ce qui est précisément le résultat attendu. Ainsi, le Théorème résulte du :

Lemme 6 (Lemme d'Adachi). *L'opérateur δ est nul sur le sous-module $\partial\tilde{B}$.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que l'on a : $\delta b_i * b_j = \delta b_j * b_i$, pour tout (i, j) ; ce qui se fait en transposant *mutatis mutandis* dans le cadre procyclique considéré ici les calculs de déterminants effectués par N. Adachi dans son rapport sur le Théorème de l'idéal principal [1] consacré au Théorème de Tannaka-Terada.

Remarque. Le quotient $\tilde{B}/I_G * \tilde{B} \simeq \tilde{U}/\tilde{U}'$ étant réputé fini, le noyau de ω regardé comme endomorphisme de $\tilde{B}/I_G * \tilde{B}$, a même ordre que son conoyau. On a donc :

$$({}^{-1}\omega(I_G * \tilde{B}) : I_G * \tilde{B}) = (\tilde{U} : \tilde{U}'\tilde{U}^\omega) = (\tilde{U} : \tilde{A}) = |G|.$$

Et le noyau de capitulation est au moins d'ordre $|G| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|$ (mais dans \tilde{U}/\tilde{U}').

RÉFÉRENCES

- [1] N. ADACHI, *Reports on principal ideal theorems*, Mem. School Sci. Engin., Waseda Univ. **37** (1973), 81–90.
- [2] E. ARTIN, *Idealklassen in Oberkörpern und allgemeine Reziprozitätsgesetz*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 46–51.
- [3] E. ARTIN & J. TATE *Class Field Theory*, Addison-Wesley (1968).
- [4] P. FURTWÄNGLER, *Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 14–36.
- [5] G. GRAS, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer-Verlag, 2003.
- [6] J. HERBRAND, *Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), 84–92.
- [7] J.-F. JAULENT, *Sur l'indépendance ℓ -adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158 .
- [8] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.
- [9] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [10] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps totalement réels*, Acta Arithmetica **103** (2002), 1–7.
- [11] T. TANNAKA & F. TERADA, *A generalization of the principal ideal theorem*, Proc. Japan Acad. **25** (1949), 7–8.
- [12] T. TANNAKA, *Some remarks concerning the principal ideal theorem*, Tôhoku Math. J. **1** (1949), 270–278.
- [13] F. TERADA, *On a generalization of the principal ideal theorem*, Tôhoku Math. J. **1** (1949), 229–269.
- [14] F. TERADA, *A principal ideal theorem in the genus field*, Tôhoku Math. J. **23** (1971), 697–718.

ADRESSES

Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex

CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex

COURRIEL

`jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux1.fr`